

# IDENTIFIKASI TITIK – TITIK BIFURKASI DARI MODEL TRANSMISI PENYAKIT MENULAR

R. Ratianingsih

Jurusan Matematika FMIPA UNTAD Kampus Bumi Tadulako Tondo Palu

## Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan lokasi titik-titik *bifurkasi* dari model transmisi penyakit menular. Titik bifurkasi ditentukan melalui pengamatan terhadap nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(x)$  di sekitar *titik-titik kritis*. Nilai – nilai *eigen* tersebut berkaitan digunakan untuk menentukan tipe kestabilan sistem di sekitar titik kritis. Lokasi titik bifurkasi ditentukan pada suatu bidang parameter yaitu tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi oleh penyakit menular. Hasil penelitian menunjukkan bahwa lokasi titik-titik tersebut berada pada suatu kurva parameter sedemikian hingga selisih antara tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi dan tingkat kematian populasi yang terinfeksi bernilai kecil maka sistem hanya memiliki satu buah titik bifurkasi, sedangkan jika selisih nilai tersebut besar maka sistem memiliki dua titik bifurkasi.

**Kata kunci** : *Bifurkasi, Nilai Eigen, Titik Kritis,*

## I. Pendahuluan

Model transmisi penyakit menular pada suatu populasi secara umum telah dikemukakan oleh Hader dan Castillo Chavez (1995). Dalam model tersebut beberapa asumsi telah diambil yakni ukuran populasi dianggap konstan, tingkat kelahiran populasi yang tidak terinfeksi sama dengan tingkat kelahiran populasi yang terinfeksi, tingkat kelahiran populasi yang tidak terinfeksi sama dengan tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi dan tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi tidak sama dengan tingkat kematian populasi yang terinfeksi. Asumsi terakhir ini selanjutnya dalam Rini, E.S (2010) diubah menjadi tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi tidak sama dengan tingkat kematian populasi yang terinfeksi. Dalam penelitian tersebut dikaji kestabilan dari titik kritis model transmisi penyakit.

Daerah kestabilan titik kritis dari model tersebut dalam Mahmudah, A (2010) dapat ditentukan melalui kurva parameter yang menggambarkan dinamika kestabilan titik kritis model tersebut relatif terhadap perubahan tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi. Perilaku model yang diamati pada daerah kestabilan tersebut menunjukkan adanya perubahan perilaku titik kritis. Hal ini dapat teramati dari adanya perubahan jenis kestabilan titik kritis model tersebut. Perubahan jenis kestabilan titik kritis mengindikasikan adanya titik-titik bifurkasi, yaitu nilai-nilai parameter yang menandai terjadinya perubahan perilaku titik kritis. Titik- titik bifurkasi tersebut sangat penting untuk diidentifikasi mengingat pada posisi tersebut model transmisi penyakit menular akan mengalami perubahan perilaku.

---

---

## II. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan kajian kualitatif sebagai metode pengamatan terhadap perilaku sistem dengan prosedur penelitian sebagai berikut :

1. Menentukan persamaan pembangun sebagai model matematika masalah transmisi penyakit menular.
2. Menentukan titik kritis dan kestabilan sistem di sekitar titik kritis.
3. Mencari diagram bifurkasi dari titik kritis untuk suatu parameter yang diobservasi.
4. Menentukan tipe kestabilan dari titik kritis
5. Melakukan simulasi

## III. Pembahasan

### III.1 Model Matematika

Misalkan  $P(t)$  mewakili banyaknya individu pada suatu populasi pada waktu  $t$  yang terbagi atas dua kelompok, yaitu  $C(t)$  yang menyatakan banyaknya individu yang memiliki tingkat aktifitas tinggi dan berperan langsung dalam penularan suatu penyakit dan  $A(t)$  adalah kelompok non-inti. Selanjutnya kelompok inti terbagi atas  $S(t)$ ,  $V(t)$  dan  $I(t)$  yang secara berturut-turut menyatakan banyaknya individu pada kelompok rentan / *Susceptible*, banyaknya individu pada kelompok tervaksinasi/ *Vacinated* dan banyaknya individu pada kelompok terinfeksi/ *Invected*. Apabila kelompok non-inti tidak berperan secara langsung pada transmisi penyakit dan fungsi recruitment ke dalam kelompok inti diasumsikan sebagai perkalian antara tingkat kematian populasi yang terinfeksi dan banyaknya individu dalam kelompok inti yang bernilai konstan maka persamaan pembangun yang mewakili masalah transmisi penyakit menular pada kelompok inti dari populasi yang diamati, menurut Hader dan Castillo Chavez (1995), dapat dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial biasa berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \mu C - \frac{\beta SI}{c} - \varphi S + \alpha(1 - \gamma)I - \mu S \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = \varphi C - \frac{\tilde{\beta} VI}{c} - \varphi S + \alpha \gamma I - \mu V \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI + \tilde{\beta} VI}{c} - \alpha I - \tilde{\mu} I \quad (3)$$

dimana  $\mu > 0$  adalah tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi,  $0 \ll \tilde{\mu} \ll \mu$  adalah tingkat kematian populasi yang terinfeksi,  $\alpha > 0$  adalah tingkat pemulihan,  $\varphi \gg 0$  adalah tingkat vaksinasi yaitu tingkat transmisi langsung individu dari sub kelompok rentan ke sub kelompok tervaksinasi,  $\beta > 0$  adalah tingkat transmisi penyakit menular dari sub kelompok terinfeksi ke sub kelompok rentan,  $0 \ll \tilde{\beta} \ll \beta$  adalah tingkat transmisi penyakit menular dari sub +Pengambilan asumsi bahwa tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi tidak sama dengan tingkat kematian populasi yang terinfeksi memungkinkan kita untuk menyatakan tingkat kematian populasi yang terinfeksi sebagai  $\tilde{\mu} = \mu + \varepsilon$  sehingga persamaan (3) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI + \tilde{\beta} VI}{c} - \alpha I - (\mu + \varepsilon)I \quad (4)$$

dimana  $\varepsilon$  adalah parameter yang merupakan ukuran kedekatan tingkat kematian populasi yang terinfeksi dan tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi. Dengan demikian model transmisi penyakit menular merupakan sistem persamaan diferensial yang dibangun oleh persamaan (1), (2) dan (4).

### III.2 Titik Kritis dan Kestabilan di Sekitar Titik Kritis

Analisis terhadap kondisi yang memungkinkan suatu individu dan populasi terinfeksi oleh penyakit menular pada saat  $t \rightarrow \infty$  sangat penting untuk dikaji. Kondisi ini dapat dianalisa dengan menentukan titik kritis dari pertumbuhan individu kelompok rentan dan kelompok terinfeksi. Titik kritis tersebut diperoleh pada saat masing-masing persamaan pembangun dari model transmisi penyakit menular mencapai *zero growth rate*. Hal ini memberikan tiga buah titik kritis  $T_1 = \left( \frac{\mu C}{\varphi + \mu}, \frac{\varphi C}{\varphi + \mu}, 0 \right)$ ,  $T_2 = \left( \frac{(\alpha + \mu + \varepsilon)C - \tilde{\beta}(C - I_2)}{\beta - \tilde{\beta}}, \frac{C(\varphi S_2 + \alpha \gamma I_2)}{\tilde{\beta} I_2 + \mu C}, I_2 \right)$  dimana  $S_2 = \frac{(\alpha + \mu + \varepsilon)C - \tilde{\beta}(C - I_2)}{\beta - \tilde{\beta}}$  dan  $I_2$  akar dengan tanda akar determinan yang positif dari persamaan berikut :

$$(\beta \tilde{\beta})I^2 + (\alpha \tilde{\beta} \gamma + \alpha \tilde{\beta} - \alpha \tilde{\beta} \gamma + \mu \beta + \varepsilon \beta - \beta \tilde{\beta} + \varphi \tilde{\beta} + \mu \tilde{\beta})I + (-\mu \beta C + C \varphi \alpha + \mu \beta + C \varphi \mu + C \varphi \varepsilon - C \varphi \tilde{\beta} + C \mu \alpha + \mu 2C + C \mu \varepsilon) = 0 \quad (5)$$

dan  $T_3 = \left( \frac{(\alpha + \mu + \varepsilon)C - \tilde{\beta}(C - I_3)}{\beta - \tilde{\beta}}, \frac{C(\varphi S_3 + \alpha \gamma I_3)}{\tilde{\beta} I_3 + \mu C}, I_3 \right)$  dimana  $S_3 = \frac{(\alpha + \mu + \varepsilon)C - \tilde{\beta}(C - I_3)}{\beta - \tilde{\beta}}$  dan  $I_3$  akar dengan tanda akar determinan yang negatif dari persamaan (5).

Kestabilan di sekitar titik kritis diamati dengan melakukan pertubasi disekitarnya sedemikian hingga pengamatan dilakukan melalui matriks Jacobi  $J(x)$  sebagai linearisasi dari sistem. Mengingat ketiga titik kritis  $T_1, T_2$  dan  $T_3$  bukanlah titik  $(0,0,0)$  maka perlu dilakukan transformasi sistem koordinat sedemikian hingga ketiga titik tersebut merupakan titik  $(0,0,0)$  dalam sistem koordinat hasil transformasi.

### III.3 Penentuan Tipe Kestabilan

Pengamatan terhadap kestabilan sistem di sekitar titik kritis diamati melalui nilai eigen  $\lambda$  dari matriks Jacobi  $J(x)$  sebagai berikut :

1. Nilai eigen real ( $\theta^2 > 4\delta$ ) :
  - a. Kedua nilai eigen positif,  $\theta > 0$ ,  $\delta > 0$ , menghasilkan trayektori simpul tak stabil (*unstable node*)
  - b. Nilai eigen satu positif dan yang lainnya negatif,  $\delta < 0$ , menghasilkan trayektori titik pelana (*saddle point*)
  - c. Kedua nilai eigen negatif,  $\theta < 0$  dan  $\delta < 0$ , menghasilkan trayektori simpul stabil (*stable node*)
2. Nilai eigen kompleks ( $\theta^2 < 4\delta, \delta > 0$ ) :
  - a. Bagian real positif,  $r > 0$ ,  $\theta > 0$  dan  $\theta^2 < 4\delta$ , menghasilkan trayektori spiral tak stabil (*unstable spiral point*)
  - b. Bagian real nol,  $r = 0$  semua nilai eigen imajiner,  $\theta = 0$ ,  $\theta^2 < 4\delta$ , menghasilkan trayektori pusat netral atau stabil netral (*neutral center* atau *neutral stable*)
  - c. Bagian real negatif,  $r < 0$ ,  $\theta < 0$  dan  $\theta^2 < 4\delta$ , menghasilkan trayektori spiral stabil (*stable spiral point*)

dimana  $\theta$ ,  $\delta$ , dan  $r$  secara berturut-turut adalah trace, determinan dan bagian real nilai eigen matriks Jacobi  $J(x)$  dari sistem .

### III.4 Diagram Bifurkasi

Perhitungan nilai eigen matriks Jacobi dari model transmisi penyebaran penyakit menular untuk titik kritis  $\gamma$  memberikan nilai – nilai berikut :

$$\lambda_{11} = -\varphi - \mu, \lambda_{12} = -\mu \text{ dan } \lambda_{13} = \frac{\beta\mu + \tilde{\beta}\varphi}{\varphi + \mu} - \alpha - \mu - \varepsilon \quad (6)$$

Persamaan (6) menunjukkan bahwa sistem dapat memiliki tiga nilai eigen negatif atau dua nilai eigen negatif dan satu nilai eigen nol. Dengan demikian penentu kestabilan sistem terletak pada nilai eigen ketiga dan dapat dinyatakan dalam persamaan parameter berikut :

$$\mu = \frac{\beta\mu + \tilde{\beta}\varphi}{\varphi + \mu} - 2\alpha - \varepsilon \quad (7)$$

Perhitungan nilai eigen matriks Jacobi dari model transmisi penyebaran penyakit menular untuk titik kritis  $\gamma_2$  memberikan persamaan berikut :

$$\lambda_2^3 + p_1\lambda_2^2 + q_1\lambda_2 + r_1 = 0 \quad (8)$$

Dimana  $p_1 = \frac{\beta I_2 + \tilde{\beta} I_2 - \beta S_2 - \tilde{\beta} V_2}{C} + \varepsilon + \alpha + 3\mu + \varphi$ ,  $q_1 = 2\varphi\mu + \varphi\alpha + 2\mu\varepsilon + \varphi\varepsilon + 2\mu\alpha\varepsilon\mu^2 + \frac{\tilde{\beta} I_2\alpha - 2\mu\tilde{\beta} V_2}{C} + \frac{\beta\tilde{\beta} I_2 - \beta\tilde{\beta} I_2 V_2 - \beta\tilde{\beta} I_2^2 S_2}{C^2} + \frac{\beta I_2\alpha\gamma - \tilde{\beta} I_2\alpha\gamma + 2\beta I_2\mu + \beta I_2\varepsilon + \varphi\tilde{\beta} I_2 + 2\mu\tilde{\beta} I_2 + \tilde{\beta} I_2\varepsilon - \varphi\beta S_2 - \varphi\tilde{\beta} V_2 - 2\mu\beta S_2}{C}$  dan

$$r_1 = \varphi\mu\alpha + \varphi\mu\varepsilon + \varepsilon\mu^2 + \alpha\mu^2 + \mu^2\varphi + \mu^3 + \frac{\beta\tilde{\beta} I_2^2 \varepsilon}{C^2} - B$$

$$B = \frac{\beta\tilde{\beta} I_2^2 S_2 + \beta\tilde{\beta} I_2^2 \mu - \beta\tilde{\beta} I_2 S_2 V_2}{C^2} + \frac{\mu^2\tilde{\beta} I_2\alpha\gamma + \beta I_2\mu^2 + \beta I_2\alpha\gamma\mu - \mu^2\beta S_2 - \mu^2\tilde{\beta} V_2 + \mu\beta\varepsilon I_2 + \varphi\tilde{\beta} I_2\varepsilon}{C} + C$$

$$C = \frac{\mu^2\tilde{\beta} I_2\alpha + \mu\tilde{\beta} I_2\varepsilon - \varphi\mu\beta S_2}{C}$$

Perhitungan nilai eigen matriks Jacobi dari model transmisi penyebaran penyakit menular untuk titik kritis  $\gamma_3$  memberikan persamaan berikut :

$$\lambda_3^3 + p_2\lambda_3^2 + q_2\lambda_3 + r_2 = 0 \quad (9)$$

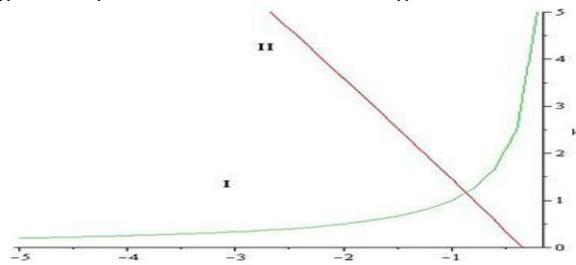
Dimanadimana  $p_2 = \frac{\beta I_3 + \tilde{\beta} I_3 - \beta S_3 - \tilde{\beta} V_3}{C} + \varepsilon + \alpha + 3\mu + \varphi$   $q_2 = \varphi\alpha + 2\mu\varepsilon + \varphi\varepsilon + 2\mu\alpha + 3\mu^2 + \frac{\tilde{\beta} I_3\alpha + \beta I_3\alpha\gamma - \tilde{\beta} I_3\alpha\gamma + 2\mu\tilde{\beta} I_3\mu + \beta I_3\varepsilon + 2\mu\tilde{\beta} I_3 + \tilde{\beta} I_3\varepsilon - \varphi\beta S_3 - \varphi\tilde{\beta} V_3 + \varphi\tilde{\beta} I_3}{C} + D$

$$D = 2\varphi\mu \frac{-2\mu\beta S_3 - 2\mu\tilde{\beta} V_3}{C} + \frac{\beta\tilde{\beta} I_3^2 - \beta\tilde{\beta} I_3 V_3 - \beta\tilde{\beta} I_3 S_3}{C^2}$$

$$r_2 = \varphi\mu\varepsilon + \varepsilon\mu^2 + \alpha\mu^2 + \mu^2\varphi + \mu^3 + \varphi\mu\alpha + \frac{\beta\tilde{\beta} I_2^2 \varepsilon - \beta\tilde{\beta} \mu I_2 S_3 + \beta\tilde{\beta} I_2^2 \mu - \beta\tilde{\beta} I_2 \mu V_3}{C^2} + E$$

$$E = \frac{\mu^2\tilde{\beta} I_3 + \beta I_2\alpha\gamma\mu - \mu^2\beta S_3 - \tilde{\beta} I_2\alpha\gamma\mu - \mu^2\beta S_2 + \mu\beta\varepsilon I_3 + \beta I_3\mu^2 - \mu^2\tilde{\beta} V_3 + \varphi\tilde{\beta} I_3\mu + \varphi\tilde{\beta} I_3\varepsilon}{C} + \frac{\mu\tilde{\beta} I_3\alpha + \mu\tilde{\beta} I_3\varepsilon - \varphi\mu\beta S_3}{C}$$

Dengan mengambil nilai  $\tilde{\beta} = 1, \alpha = 0,5, \varepsilon = 0, \varphi = 0,5, \mu = 1$  dan  $C = 1$  dari persamaan (7), (8) dan (9) bisa didapatkan irisan ketiga kurva parameter dalam  $\mu$  dan  $\varepsilon$  sebagai berikut :



Gambar 1 Diagram Bifurkasi

Kurva parameter pada gambar 1 membagi bidang ( $X, Y$ ) menjadi tiga bagian. Kita dapat menentukan tipe kestabilan titik-titik kritis untuk masing-masing nilai parameter yang bersesuaian. Hal itu dapat dilihat pada tabel berikut :

**Tabel 1. Tipe Kestabilan Titik-Titik Kritis di Bidang Parameter**

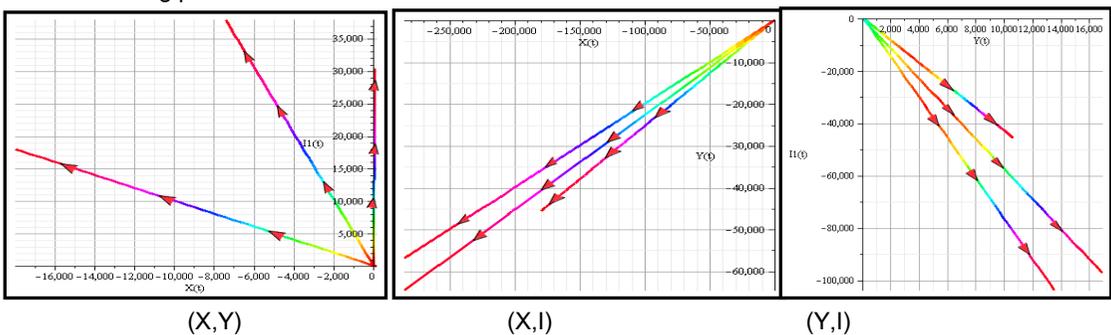
Titik kritis	Tipe Kestabilan	
	Di Kurva	Di luar Kurva
1	Unstable node	Asymptotically stable node
2	Unstable node	Unstable node
	Unstable saddle point	Unstable saddle point
3	Unstable saddle point	Unstable saddle point
	Asymptotically stable node	Asymptotically stable node

Tabel 1 menunjukkan bahwa terdapat perubahan tipe kestabilan dari titik kritis  $1$  bila nilai parameter digerakkan. Tipe kestabilan titik kritis tersebut berubah dari asymptotically stable node menjadi unstable node bila melalui kurva parameter. Hal ini mengakibatkan sistem yang semula memiliki dua titik kritis asymptotically stable node dan satu titik kritis unstable node akan berubah menjadi dua titik kritis unstable node dan satu titik kritis asymptotically stable node. Artinya terdapat satu titik kritis yang semula asymptotically stable node berubah menjadi unstable node. Perubahan tipe kestabilan dari titik kritis tersebut menunjukkan adanya bifurkasi. Lokasi titik bifurkasi berada di sepanjang kurva parameter.

Perhatikan kembali bahwa parameter merupakan selisih antara tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi dan tingkat kematian populasi yang terinfeksi. Diagram bifurkasi pada gambar 1 menunjukkan bahwa jika selisih antara tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi dan tingkat kematian populasi yang terinfeksi bernilai kecil maka sistem hanya memiliki satu titik bifurkasi saja. Bila selisih tersebut bernilai besar maka sistem dapat memiliki dua titik bifurkasi.

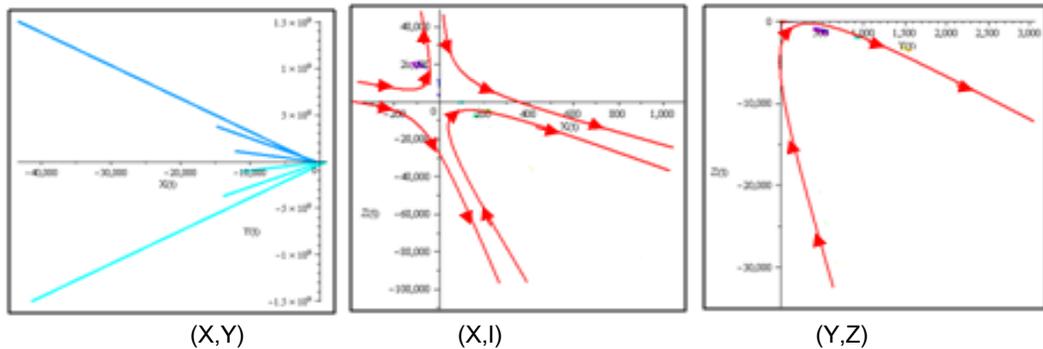
**III.5 Simulasi**

Untuk pemilihan nilai-nilai  $\beta = 2, \gamma = 5, \delta = 2, \alpha = 0,5, \rho = 0,005, \mu = -3$  dan  $\epsilon = 0,6$  diperoleh nilai eigen matriks Jacobi  $J(x)$  adalah  $1,3$  dan  $12,9$ . Perilaku sistem di sekitar titik kritis  $1$  dapat diamati melalui bidang phase berikut :



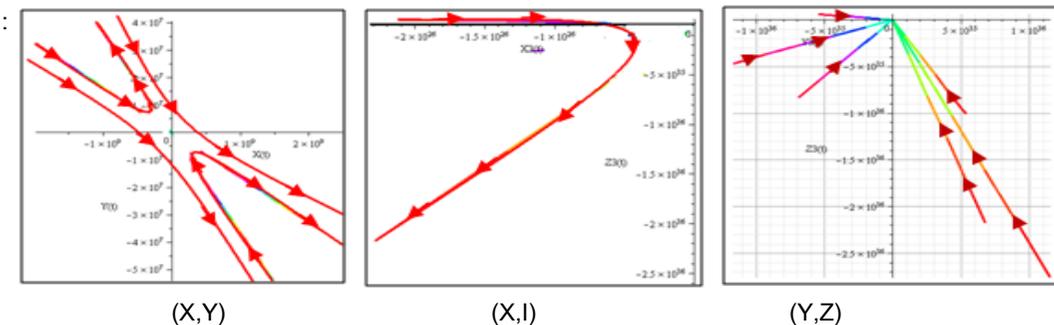
**Gambar 2. Bidang Phase Titik Kritis**

Untuk pemilihan nilai-nilai  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 5$ ,  $\delta = 2$ ,  $\rho = 0,5$ ,  $\sigma = 0,005$ ,  $\omega = 0,01$  dan  $\epsilon = 3,6$  diperoleh nilai eigen matriks Jacobi  $J(x)_2$  adalah  $0,6431700616 + 2,138173316i$ ,  $0,6431700616 - 2,138173316i$  dan  $-1,326806287$ . Perilaku sistem di sekitar titik kritis<sub>2</sub> dapat diamati melalui bidang phase berikut :



Gambar3. Bidang Phase Titik Kritis

Untuk pemilihan nilai-nilai  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 5$ ,  $\delta = 2$ ,  $\rho = 0,5$ ,  $\sigma = 0,005$ ,  $\omega = 2 \cdot 10^7$  dan  $\epsilon = -9,2 \times 10^7$  diperoleh nilai eigen matriks Jacobi  $J(x)$  adalah  $5,961777605 \cdot 10^7$ ,  $-2,023110411 \cdot 10^7$  dan  $-2,799999884 \cdot 10^7$ . Perilaku sistem di sekitar titik kritis<sub>2</sub> dapat diamati melalui bidang phase berikut :



Gambar4. Bidang Phase Titik Kritis

### III.6 Open Problem

Penelitian yang mengidentifikasi keberadaan titik-titik bifurkasi dari model transmisi penyakit menular ini masih bisa dikembangkan lagi dengan mengkaji jenis-jenis bifurkasi yang bisa muncul. Hal ini sangat penting mengingat bifurkasi sangat berkaitan erat dengan perubahan perilaku sistem..

### IV. Kesimpulan

Persamaan pembangunan sebagai model matematika masalah transmisi penyakit menular merupakan suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang menggambarkan interaksi antar masing – masing variabel yang dilengkapi dengan parameter pembangunan sistem. Terdapat tiga buah titik kritis yang merupakan lokasi dimana sistem berada dalam kondisi statis. Kestabilan sistem dimati di sekitar titik kritis melalui pengamatan terhadap nilai eigen matriks linearisasi yang mewakili sistem. Dinamika sistem dapat tergambar melalui diagram bifurkasi dari tiap – tiap titik kritis untuk suatu parameter yang diobservasi. Hal ini ditunjukkan melalui adanya perubahan tipe

kestabilan dari titik kritis bila nilai parameter digerakkan. Pergerakan nilai parameter yang merupakan tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi menunjukkan bahwa jika selisih antara tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi dan tingkat kematian populasi yang terinfeksi bernilai kecil maka sistem hanya memiliki satu titik bifurkasi saja. Namun bila selisih tersebut bernilai besar maka sistem dapat memiliki dua titik bifurkasi.

#### V. Daftar Pustaka

1. Bellomo, N., and Preziosi, L, 1995, *Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation*, CRC Press, Inc, Florida.
2. Boyce, W. E., and Richard, C. D, 1996, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Sixth Edition, Wiley, Singapore.
3. C.T. Rudi, 1991, *Dinamika Populasi, Pustaka Sinar Harapan Anggota Ikapi bekerja sama dengan Universitas Kristen Krida Wacana (Ukrida)*, Jakarta.
4. J. Giesecke, 1994, *Modern Infectious Disease Epidemiology*, Oxford University Press, New York.
5. Khamsi, M. A, 2004, *Equilibrium Point Analysis : Linearization Technique*, Utrecht University, Utrecht.
6. K.P. Hadeler and C.C. Chavez, 1995, *A Core Group Model for Disease Transmission*, vol. 128: 41-55, Math. Biosci.
7. Leon, S. J, 2001, *Aljabar Linier dan Aplikasinya*, Edisi 5, ( terjemahan), Penerbit Erlangga, Jakarta
8. Lin Y., and Stadtherr, M. A, 2005, *Global Optimization for Parameter Estimation in dynamic System*, <http://aiche.confex.com/aiche/2005/techprogram/P15751.HTM>, diakses 5 Januari 2010.
9. Mahmudah, Ade, *Penentuan daerah Kestabilan Model Matematika Transmisi Penyakit Seksual Melalui Diagram Parameter*, Universitas Tadulako, Palu.
10. Meyer, W., J, 1984, *Concept of Mathematical Modelling*, Mc.Graw Hill Book Company, Newyork.
11. Rini, E., S, 2010, *Kestabilan dari Titik Kritis Model Transmisi Penyakit Seksual*, Universitas Tadulako, Palu.